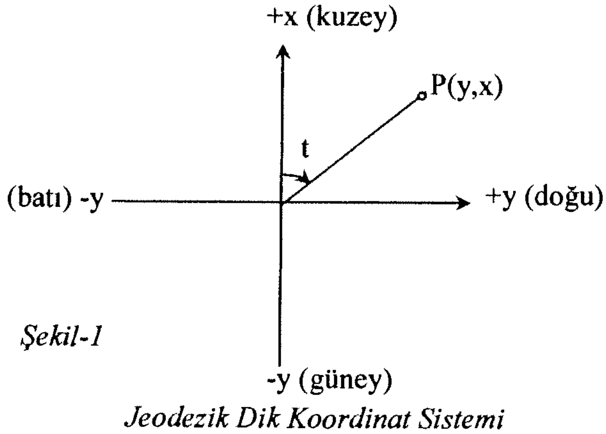
DÜZLEM JEODEZİ

Jeodezik çalışmalarda, çalışma bölgesinin büyüklüğü ve çalışmadan istenen hassasiyet referans yüzeyinin seçimini belirler. Bu koşulların elverişli olması halinde, sınırlı çalışma bölgelerinde referans yüzeyi (yeryuvarının şekli) olarak o bölgedeki jeoide (deniz seviyesine) teğet bir düzlem alınır ve böylece hesaplamalarda büyük kolaylık sağlanmış olur. Pratik jeodezik çalışmaların çok büyük kısmı da düzlem jeodezi kapsamına girmektedir. Düzlem jeodezide tüm ölçümlerin söz konusu teğet düzlem üzerinde yapıldığı varsayılır ve hesaplamalar tamamen düzlem esaslara göre yürütülür [6],[8],[26].

JEODEZİK TEMEL PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Düzlem jeodezide, düzlem jeodezik dik koordinat sistemi kullanılır(şekil-1). Bu sistemde +x ekseni her zaman kuzeyi gösterir. Kenarların doğrultuları (yönleri) açıklık açısıyla belirlenir. Jeodezik temel ödevler dört tanedir.

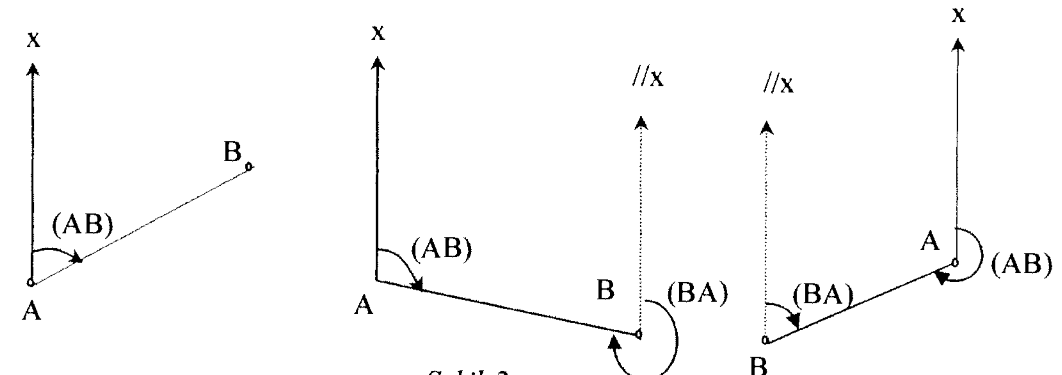


Şekil-1

Jeodezik Dik Koordinat Sistemi

Açıklık açısı (semt açısı)

Bir kenarın ya da doğrultunun x ekseniyle (kuzeyle) saat ibresi yönünde yapmış olduğu açıdır ve (AB) şeklinde gösterilir. Anlamı A'dan B'ye giden doğrultunun x ekseni ile saat ibresi yönünde yapmış olduğu açıdır. Şekil-2 de (AB) açıklık açısının değişik durumları gösterilmektedir.



Şekil-2

(AB) açıklık açısı tanım gereği her durumda 400^g dan küçük 0^g dan büyük ve eşittir.

$$0^g \leq (AB) < 400^g$$

Yine şekillerden karşılıklı semt açıları (AB) ile (BA) arasında 200^g fark olduğu görülmektedir.

$$(BA) = (AB) \pm 200^g$$

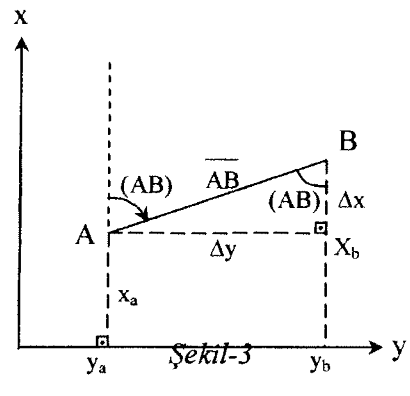
(AB) semti 200^g dan büyük ise (BA) semti (AB) semtinin 200^g eksiğine değilse yani (AB) semti 200^g dan küçük ise (BA) semti (AB) semtinin 200^g fazlasına eşittir.

TEMEL ÖDEVLER

I. Temel Ödev: Koordinat taşıma problemi olarak da adlandırılmaktadır. Bu problemde koordinatları belli olan bir A noktasından koordinatı bilinmeyen B noktasına (AB) semt açısı ve $\overline{AB}$ kenar uzunluğundan yararlanarak koordinat taşınması amaçlanmaktadır (şekil-3).

Verilenler: A(y_a, x_a), (AB), $\overline{AB}$

İstenenler: B(y_b, x_b)



Şekil-3

Çözüm: B noktasının koordinatları $\Delta y = \overline{AB}\sin(AB)$ ve $\Delta x = \overline{AB}\cos(AB)$ olmak üzere $y_b = y_a + \Delta y$ ve $x_b = x_a + \Delta x$ olarak bulunur.

Örnek-1:

Verilenler: y_a = 5000.00m x_a = 4400.00m (AB) = 75^g $\overline{AB}$=350.00m
İstenenler: y_b = ? x_b = ?

$$y_b = y_a + \Delta y$$
$$x_b = x_a + \Delta x$$
$$\tan(AB) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\Delta y = \overline{AB}.\sin(AB) \qquad y_b = y_a + \overline{AB}.\sin(AB)$$
$$\Delta x = \overline{AB}.\cos(AB) \qquad x_b = x_a + \overline{AB}.\cos(AB)$$

y_b = 5000 + 350.sin75 = 5323.36m

x_b = 4400 + 350.cos75 = 4533.94m

II.Temel Ödev: Semt ve kenar hesabı problemi olarak da adlandırılmaktadır. Bu problemde koordinatları belli olan A ve B noktaları arasındaki (AB) semt açısı ve $\overline{AB}$ kenar uzunluğunun bulunması amaçlanmaktadır.

Verilenler: A(y_a, x_a), B(y_b, x_b)

İstenenler : $\overline{AB}$,(AB)

$$\Delta y = y_b - y_a$$
$$\Delta x = x_b - x_a$$
$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$
$$\tan(AB) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow (AB) = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Semt hesabı bu şekilde hesap makinesiyle bulunduğunda, (AB) semti -100^g ile $+100^g$ arasında olacaktır. Semtin hangi bölgede olduğunu belirleyebilmek için aşağıdaki tabloda gösterilen eklemelerin yapılması gerekir.

Bölge	Δy	Δx	Açıya Eklenecek Değer
I	+	+	0
II	+	-	$+200^g$
III	-	-	$+200^g$
IV	-	+	$+400^g$

Pratik Yol :
Semt hesabı hiçbir bölge irdelemesine gerek kalmadan aşağıdaki eşitlikten direkt olarak da bulunabilir [6].

$$(AB) = 2\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x - \overline{AB}} + 200^g$$

Örnek-2:

Verilenler: Ya = 5230.00m Xa = 4350.00m

Yb= 5200.00 Xb = 4400.00

İstenenler: (AB) = ? , $\overline{AB}$ = ?

Çözüm : Önce verilen koordinat değerlerinden Δy , Δx koordinat farkları hesaplanır.

Δy = Yb-Ya = -30.00 Δx =Xb-Xa = 50.00

$$(AB) = \arctan\frac{-30}{50} \Rightarrow (AB) = -34.4042^g + 400^g$$

$$(AB) = 365.5958^g$$

Yukarıda (AB) semtinin hesabında Δy değeri eksi Δx değeri artı çıktığı için bulunan semt değerine 400 grad eklenmiştir. $\overline{AB}$ kenarı ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} = \sqrt{3400} = 58.31\text{m}$$

Semt hesabı pratik yoldan aşağıdaki şekilde yapılır,

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} = \sqrt{3400}$$

$$(AB) = 2\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x - \overline{AB}} + 200^g$$

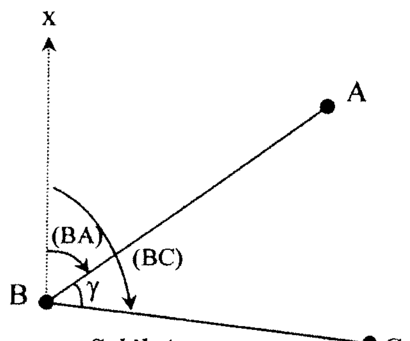
$$(AB) = 2\arctan\frac{-30}{50 - \sqrt{3400}} + 200^g = 165.5958^g + 200^g = 365.5958^g$$

Kontrol : I.temel ödevle iki nokta arasındaki kutupsal elemanlardan dik koordinat hesabı,II.temel ödevle iki noktanın dik koordinatlarından kutupsal elemanlar hesaplanmaktadır. Bu ilişkiden dolayı II.temel ödev sonuçlarının kontrolü I.temel ödevle , I.temel ödevin sonuçlarının kontrolü II.temel ödev çözümüyle yapılır.

III. Temel Ödev: Koordinatı bilinen A,B ve C gibi ardışık üç nokta arasında oluşan üçgen açısının hesabı olarak da adlandırılmaktadır (şekil-4).

Verilenler: A(y_a, x_a), B(y_b, x_b), C(y_c, x_c)

İstenenler: γ = ABC açısı



Şekil-4

1. yol: $$\cos\gamma = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2.\overline{AB}.\overline{BC}}$$

2. yol: $$\gamma = (BC) - (BA)$$

$$(BC) = \arctan\frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

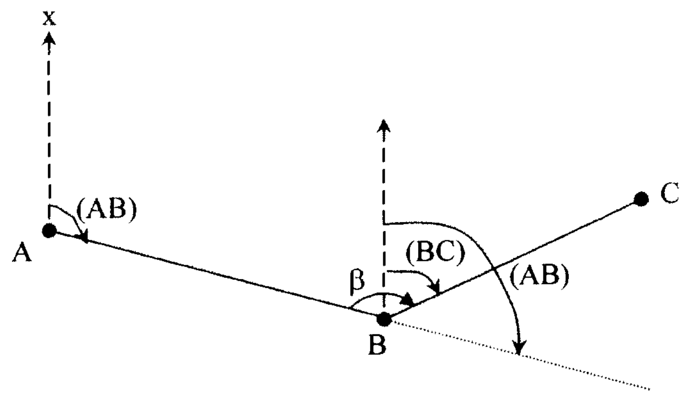
$$(BA) = \arctan\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

IV. Temel Ödev:

Semt taşıma problemi olarak da adlandırılmaktadır. Bu problemde A,B ve C gibi ardışık üç noktanın bulunduğu bir geçki de (AB) semt açısı ve β kırık açısından (B noktasında gidiş yönüne göre solda kalan açı) yararlanarak (BC) semt açısının bulunması amaçlanmaktadır (şekil-5).

Verilenler: (AB) semti ve β kırık açısı

İstenen: (BC) semti



Şekil-5

$$(BC) = (AB) - (200^g - \beta)$$
$$(BC) = (AB) + \beta - 200^g$$

Yukarıdaki şekil-5 e göre (BC) semtini bulabilmek için (AB) semtine β açısını ekleyip 200^g çıkarmak gerekir. Ancak bu durum yalnız bu şekil için geçerlidir. (BC) semti için genel bir bağıntı yazmak istenirse (AB) + β toplam değerine göre aşağıdaki eklemeler yapılır.

1) $(AB) + \beta \geq 200^g \Rightarrow -200^g \Rightarrow (BC) = (AB) + \beta - 200^g$

2) $(AB) + \beta < 200^g \Rightarrow +200^g \Rightarrow (BC) = (AB) + \beta + 200^g$

3) $(AB) + \beta \geq 600^g \Rightarrow -600^g \Rightarrow (BC) = (AB) + \beta - 600^g$

Pratik Yol :

Semt hesabı için daha basit bir genel bağıntı kullanmak istenirse, her durumda;

$$(BC) = (AB) + \beta + 200^g$$

eşitliği kullanılır [6]. Bu bağıntıdan bulunacak (BC) değeri bazen 400^g, bazen de 800^g'dan büyük çıkabilir. Semt açısı tanım gereği 400^g'dan küçük olması gerektiğinden hesaplanan semt açısı 400^g'dan büyükse 400^g, 800^g'dan büyük ise 800^g çıkarılır.

Örnek : Aşağıda çeşitli (AB) semtleri ve β kırık açılarına göre olması gereken (BC) semtleri gösterilmiştir.

(AB) semti	β kırık açısı	(BC) = (AB)+β+200^g
127.3578^g	56.4598^g	383.8176^g
52.1123^g	215.5643^g	67.6766^g
314.9845^g	333.6679^g	48.6524^g
333.5588^g	7.1973^g	140.7561^g

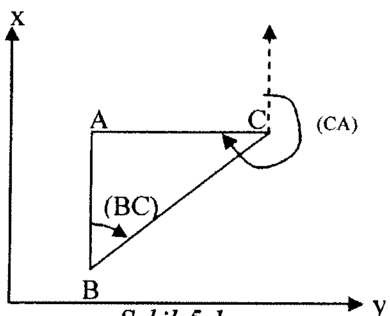
Temel Ödevlerle İlgili Örnek Problemler

Örnek-3: $y_a = 1200.00m$, $x_a = 1500.00m$, $x_b = 1320.00m$
ve sin(AB) = 0.6 olarak verildiğine göre y_b değerini hesaplayınız.

$$\sin(AB) = 0.60000 \Rightarrow (AB)_1 = 40.9666^g,\ \ (AB)_2 = 159.0334^g$$
$$\Delta x = -180 < 0$$
$$\text{olduğldu\u{g}u (AB) semti ikinci bölgededir.} (AB) = 159.0340$$
$$\overline{AB} = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)} = 225.00m$$
$$y_b = y_a + \overline{AB}.\sin(AB) = 1335.00m$$

Örnek-4: Aşağıdaki verilerden yararlanarak (BC) açıklık açısını hesaplayınız.

$$(CA) = 300^g \quad y_a = 2100m \quad x_a = 3480m$$
$$\overline{AC} = 60m \quad y_b = 2100m \quad x_b = 3400m$$
$$(BC) = ?$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2} \Rightarrow \overline{AB} = 80m$$
$$(BC) = \arctan\frac{60}{80} = 40.9666^g$$



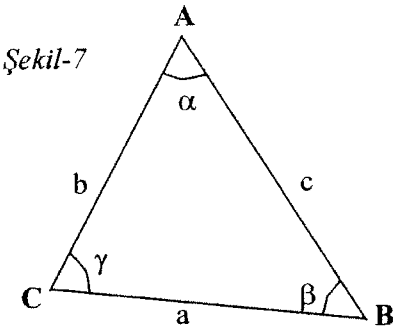
Şekil-5.1

Örnek-6:

Aşağıda köşe noktalarına ait koordinatları verilen ABC üçgeninin iç açıları toplamının tam 200 grad olduğunu gösteriniz (şekil-7).

N.N	Y(m)	X(m)
A	424.63	617.38
B	633.41	475.62
C	312.15	512.55

Şekil-7



Çözüm :

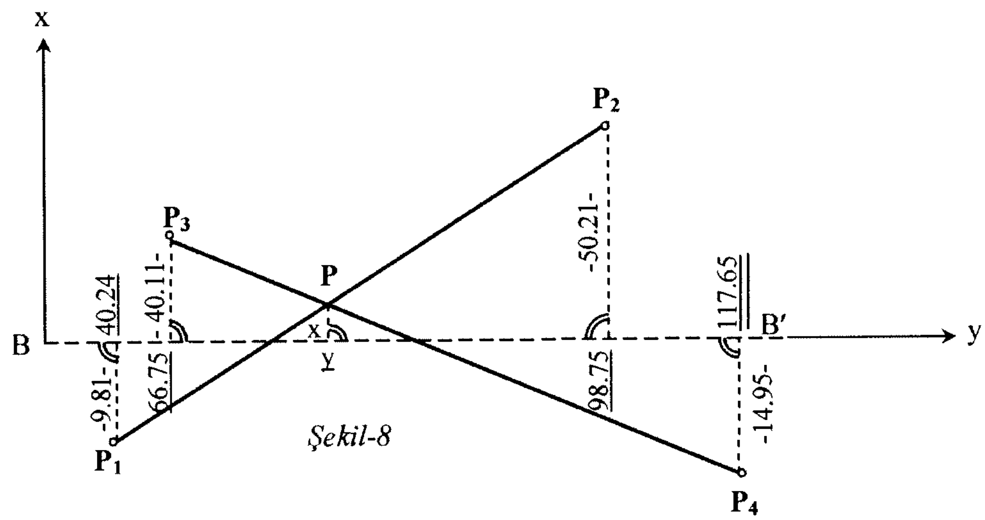
$(AB) = 137.9736^{g}$ $\alpha = (AC) - (AB) = 114.2666^{g}$

$(AC) = 252.2402^{g}$ $\beta = (BA) - (BC) = 30.6874^{g}$

$(CB) = 107.2862^{g}$ $\gamma = (CB) - (CA) = 55.0460^{g}$

Kontrol : $\alpha + \beta + \gamma = 200.0000^{g}$

Örnek-7:



Şekil-8

Aşağıda verilen P_1P_2 ve P_3P_4 doğrularına ait prizmatik alım ölçülerinden yararlanarak, doğruların kesim noktası P nin koordinatlarını hesaplayınız (şekil-8).

İstenen: $P(y_P, x_P) = ?$

Çözüm için BB' ölçü doğrusunu y ekseni olarak seçilirse prizmatik alım ölçü değerleri noktaların koordinatları olur. Yukarıdaki açıklamalardan yararlanarak P_1P_2 ve P_3P_4 doğrularının denklemleri yazılır ve iki doğru denkleminin ortak çözümünden kesim noktasının koordinatları bulunur.

Noktaların koordinatları (y,x);

	P_1(40.24 -9.81)	P_3(66.75 40.11)
	P_2(98.75 50.21)	P_4(117.65 -14.95)
Koordinat farkları Δ :	**58.51 60.02**	**50.9 -55.06**

Bir (y_o,x_o) noktasından geçen ve semti (m= tan t) belli olan doğrunun denklemi,

$$y-y_o = m\,(x-x_o) \text{ dır.}$$

Doğruların semtlerinin tanjantları;

$m_{12} = \tan(1\text{-}2) = (\Delta y/\Delta x)$ $\qquad$ $m_{34} = \tan(3\text{-}4) = (\Delta y/\Delta x)$

$m_{12} = 58.51/60.02 = 0.9748417$ $\qquad$ $m_{34} = 50.9/\text{-}55.06 = -0.9244461$

P_1P_2 doğrusunun denklemi;

$$Y - 40.24 = m_{12}\,(X+9.81) \rightarrow Y= 0.9748417\,x +49.803197$$

P_3P_4 doğrusunun denklemi;

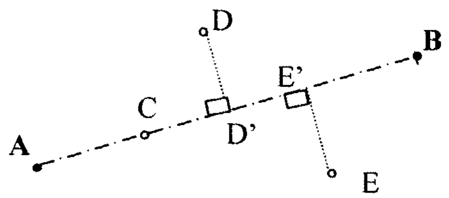
$$Y - 66.73 = m_{34}\,(X-40.11) \rightarrow Y= -0.9244461\,x +103.80953$$

Bu iki doğru denklemi ortak çözülürse kesim noktasının koordinatları;

$$Y_p = 77.52\text{m} \quad \text{ve} \quad X_p = 28.43\text{m. olur.}$$

YAN NOKTA ve KÜÇÜK NOKTA HESABI

Koordinatları bilinen A ve B noktalarının oluşturduğu AB doğrusu üzerinde, A başlangıç noktasına göre mesafesi belli bir C noktasının koordinatının bulunması *küçük nokta hesabı* veya *binder hesabı* olarak adlandırılır. Aynı AB doğrusuna, doğru üzerinde olmayan E ve D noktalarından dik düşülmüşse yani E ve D noktalarının prizmatik alımı yapılmışsa (dik ayak ve dik boyları belli ise) söz konusu E ve D noktalarının koordinatlarının hesabı *yan nokta hesabı* olarak adlandırılmaktadır. Aşağıdaki şekil-9 da görüleceği üzere dik boyunun sıfır olması halinde yan nokta hesabı küçük nokta hesabına dönüşmektedir. Yani küçük nokta hesabı yan nokta hesabının özel bir durumu olmaktadır. Jeodezik uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan yan nokta hesabı özellikle prizmatik alımı yapılan detay noktalarının çiziminde ve detay noktalarının oluşturduğu kapalı alanların hesabında kullanılmaktadır[6],[26]. Örneğin aşağıdaki şekil-9 daki E yan noktasının koordinatlarının nasıl hesaplanacağını görelim.



Şekil-9

Verilenler:
$A(y_a, x_a)$, $B(y_b, x_b)$,$AB_ö$
AE': dik ayağı
E'E : dik boyu
İstenen:
$E(y_e, x_e) = ?$

Prizmatik alım işleminde genellikle sürekli ölçü yapılır. Yani dik ayak araları değil her defasında A başlangıç noktasından itibaren dik ayak mesafeleri ölçülür ve bu ölçüme son B noktasına kadar kontrol amacıyla devam edilir. Bu durumda AB mesafesi için bir koordinatlardan hesaplanacak AB_h uzunluğu bir de sürekli ölçü sonucu elde edilen $AB_ö$ uzunluğu olacaktır. Bu iki değerden hangisine itibar edilmelidir. Söz konusu iki değer arasındaki fark $d = AB_h - AB_ö$ kabul edilebilir sınırlar içinde kalıyorsa hesaplanan uzunluk ölçülen uzunluğa tercih edilir ve bir ölçek dönüşümüyle ölçülen dik ayak uzunlukları hesaplanan uzunluğa dönüştürülür. Yani ölçülen uzunluklar $(AB_h / AB_ö)$ oranıyla çarpılır. Bu tercihin nedeni, hesaplanan uzunluk poligon noktalarının koordinatlarından bulunmuştur ve poligon noktası koordinatlarının hiç şüphesiz dik alım işlemine göre daha hassas ölçmeler sonucunda elde edilmesidir. Ayrıca bu tercih işlemi hesaplamaların tutarlılığı ve bütünlüğü için de bir zorunluluktur. Eğer hesaplanan d farkı hata sınırını aşıyorsa bunun nedeni araştırılmalıdır.

E yan noktasının koordinatları şekil-9 dan aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Y_E = Y_a + AE' \sin(AB) + E'E \cos(AB)$$

$$X_E = X_a + AE' \cos(AB) - E'E \sin(AB)$$

(AB) semti verilen koordinatlardan hesaplanır. Aynı bir ölçü doğrusu üzerindeki yan noktaların hesabında sin(AB) ve cos(AB) değerleri sabit kalır. Bu değerler yerine kısaltmalar kullanır ve ölçek dönüşümünü de yaparsak,

$$a = \sin(AB) = (Yb - Ya) / AB_ö$$

$$b = \cos(AB) = (Xb - Xa) / AB_ö$$

Yan nokta hesabı eşitliklerimiz aşağıdaki gibi olur.

$$Y_E = Y_a + a\,AE' + b\,E'E$$

$$X_E = X_a + b\,AE' - a\,E'E$$

Yukarıdaki eşitliklerde dik ayaklarını s ve dik boylarını h ile gösterirsek eşitliklerimiz daha sade bir görünüm alır ve bir P_i yan noktasının koordinatları aşağıdaki eşitliklerden hesaplanır.

$$Y_i = Y_a + a\,s_i + b\,h_i$$

$$X_i = X_a + b\,s_i - a\,h_i$$

Verilen dik boyu uzaklıkları (h), A noktasından B noktasına doğru gidişte AB doğrusunun yani hesaplama yönünün sağında ise (+), solunda ise (-) alınarak yan nokta hesabı yapılmalıdır. Bu eşitliklerle küçük nokta hesabı yapılmak istenirse dik boyu mesafelerinin sıfır alınması yeterli olur.

Kontrol eşitlikleri ise;

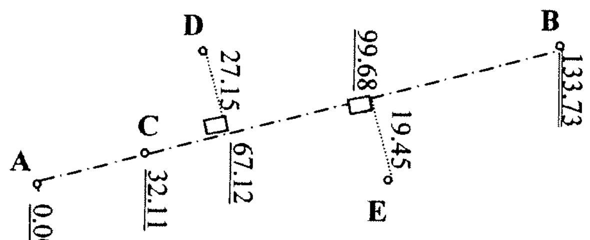
$$[Y] = n\,.\,Y_a + a\,[s] + b\,[h]$$

$$[X] = n\,.\,X_a + b\,[s] - a\,[h]$$

olur.

Örnek-8:

Aşağıda şekil-10 da verilen ölçü ve koordinat değerlerinden yararlanarak AB doğrusu üzerindeki C küçük noktasının, D ve E yan noktalarının koordinatlarını hesaplayınız ve yan nokta hesabının kontrolünü yapınız .



Şekil-10

NN	Y	X
A	24610.32	12410.21
B	24709.18	12500.33

Çözüm:

Önce A,B noktalarının koordinatlarından Δy ve Δx koordinat farkları bulunur.

$\Delta y = Y_b - Y_a = 98.86$ $\Delta x = X_b - X_a = 90.12$

$AB_h = (\Delta y^2 + \Delta x^2)^{1/2} = 133.77$
$AB_ö = 133.73m$
$d = AB_h - AB_ö = 0.04m$ (hata sınırı içinde)
$a = \Delta y / AB_ö = 0.739251$
$b = \Delta x / AB_ö = 0.673895$

Bir P_i yan noktası koordinat hesabı eşitlikleri aşağıdaki gibidir,

$Y_i = Y_a + a\, s_i + b\, h_i$ $X_i = X_a + b\, s_i - a\, h_i$

Hesaplamalar aşağıda çizelge üzerinde gerçekleştirilecektir.

NN	s Dik ayağı	h Dik boyu	Y	X	NN
A	0.00	0.00	**24610.32**	**12410.21**	A
C	32.11	0.00	24634.06	12431.85	C
D	67.12	**-27.15**	24641.64	12475.51	D
E	99.68	19.45	24697.12	12463.01	E
B	133.73	0.00	**24709.18**	**12500.33**	B
Toplam	332.64	-7.70	123292.32	62280.91	

Kontrol:

$[Y] = n \,.\, Y_a + a\,[s] + b\,[h]$

123292.32=123051.60+245.904-5.189

123292.32=123292.315

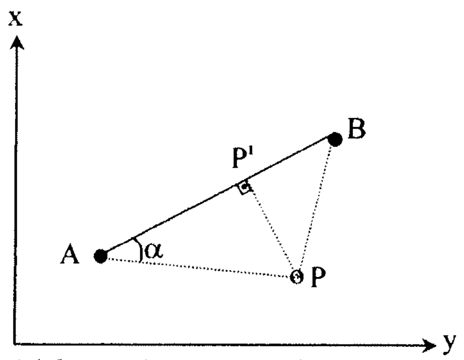
ve

$[X] = n \,.\, X_a + b\,[s] - a\,[h]$

62280.91=62051.05+224.16+5.69

62280.91=62280.902

DİK AYAĞI ve DİK BOYU HESABI



Verilenler: $A(y_a, x_a)$ $B(y_b, x_b)$ $P(y_p, x_p)$

İstenenler: $\overline{AP'}$ dik ayağı ve $\overline{PP'}$ dik boyu

Şekil-11 Dik ayağı ve dik boyu hesabı

Bu problem yan nokta hesabının tersi olarak da düşünülebilir. Problem yukarıdaki şekil-11 de görülen ve AB doğrusunun dışında verilen koordinatları bilinen bir P noktasının dik ayağı AP' ve dik boyu PP' nün hesaplanmasıdır.

Çözüm koordinatları bilinen A,B ve P noktalarından yararlanarak önce şekilde gösterilen α açısının α = (AP)-(AB) şeklinde bulunmasıyla yapılabileceği gibi yan nokta hesabının tersi şeklinde düşünülerek de yapılabilir. Aşağıda her iki duruma göre çözüm gösterilmektedir. Problem bu haliyle elde prizma olmadan dik ayağı ve dik boyunun hesaplanmasına da yarar.

I.Çözüm:

$\alpha = (AP)-(AB)$ $\quad\quad \overline{AP} = (\Delta y^2+\Delta x^2)^{1/2}$

$\overline{AP'} = \overline{AP}\cos\alpha$ $\quad\quad \overline{PP'} = \overline{AP}\sin\alpha$

II.Çözüm:

$$\overline{AP'} = a(y_p - y_a) + b(x_p - x_a)$$

$$\overline{PP'} = b(y_p - y_a) - a(x_p - x_a)$$

$a = \sin(AB)$ $\quad\quad b = \cos(AB)$ dir.

Örnek-9:

A,B ve P noktalarının koordinatları verilmektedir. P noktasının AB ölçü doğrusu üzerindeki olması gereken dik ayak ve dik boyunu hesaplayınız (şekil-11).

NN	Y	X
A	24610.32	12410.21
B	24709.18	12500.33
P	24697.12	12463.01

I.Çözüm: α = (AP)-(AB)= 65.20985-52.94216= 12.2668^g

AP = 101.598m

$\overline{AP'} = \overline{AP}\cos\alpha = 99.72$ $\overline{PP'} = \overline{AP}\sin\alpha = 19.45$

II.Çözüm:

$a = \sin(AB) = 0.73901933$ $b = \cos(AB) = 0.67368422$

$\overline{AP'} = a(y_p - y_a) + b(x_p - x_a) = a(86.8) + b(52.8) = 99.72m$

$\overline{PP'} = b(y_p - y_a) - a(x_p - x_a) = b(86.8) - a(52.8) = 19.45m$